page 322 1/4 . 1992.
I. E. N. A. C Option

CONCOURS EXTERNE DE RECRUTEMENT D'INGÉNIEURS DE L'ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE (I.E.N.A.C)

Epreuve OPTIONNELLE de MATHEMATIQUES

NOTATIONS ET DEFINITIONS

$f \circ g$ désigne pour deux applications f et g d'un même ensemble E dans lui-même la fonction composée définie pour tout x de E par $f \circ g(x) = f(g(x))$;

$Ker\ f$ désigne pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, le noyau de cet endomorphisme ;

$\mathrm{Im}\ f$ désigne pour un endomorphisme f d'un espace vectoriel E, l'image de cet endomorphisme ;

$A + B$ désigne pour deux sous-espaces vectoriels A et B d'un espace vectoriel E la somme de ces deux sous-espaces définie comme le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs pouvant s'écrire comme la somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B ;

$A \oplus B$ désigne la somme directe de deux sous-espaces vectoriels de E, c'est-à-dire la somme de deux sous-espaces vectoriels A et B tels que $A \cap B = \{ 0 \}$;

$t_r(A)$ désigne pour une matrice carrée A d'ordre n sur un corps K et de terme général a_{ij}, la trace de A définie par $t_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$;

On rappelle que pour deux matrices carrées A et B d'ordre n sur un corps K commutatif on a $t_r(A + B) = t_r(A) + t_r(B)$ et $t_r(AB) = t_r(BA)$.

PROBLEME

Soit E un espace vectoriel sur un corps K, avec $K = \mathrm{R}$ ou C.

On appelle projecteur de E tout endomorphisme de E qui vérifie $f \circ f = f$.

On se propose d'étudier quelques propriétés des projecteurs de E.

– PREMIÈRE PARTIE –

On se donne un projecteur f de E et on se propose de démontrer quelques propriétés élémentaires de f.

1.1. – Montrer que $E = Ker\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

1.2. – Que peut-on dire de la restriction de f à $\mathrm{Im}\, f$?

1.3. – Montrer que pour tout sous-espace vectoriel A de E on a :

$$f^{-1}(A) = (A \cap \mathrm{Im}\, f) \oplus Ker\, f$$

1.4. – Montrer qu'un sous-espace vectoriel de E est stable par f si et seulement si il est somme d'un sous-espace vectoriel du noyau de f et d'un sous-espace vectoriel de l'image de f.

– DEUXIÈME PARTIE –

On recherche ici d'autres caractérisations des projecteurs de E.

2.1. – Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est un projecteur de E si et seulement si il existe deux sous-espaces vectoriels A et B de E tels que :

- $E = A \oplus B$;
- $\forall x \in A\ ,\ f(x) = 0$;
- $\forall x \in B\ ,\ f(x) = x$.

On dira alors que f est la projection sur B parallèlement à A.

2.2. – Soit f un endomorphisme de E. I désigne l'application identique de E.

Montrer que $I - f$ est un projecteur de E si et seulement si f en est un.

Comparer le noyau et l'image de $I - f$ à ceux de f.

2.3. – Soit f et g deux endomorphismes de E.

Montrer que f et g sont deux projecteurs de même image si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

Donner de même une condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient deux projecteurs de même noyau.

– TROISIEME PARTIE –

On se donne deux projecteurs f et g de E. On se propose d'étudier les propriétés de $f \circ g$, $g \circ f$ et $f + g$.

3.1. – Montrer que si $f \circ g = g \circ f$ on a :

$$E = (\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) \oplus (\mathrm{Im}\, f \cap Ker\, g) \oplus (Ker\, f \cap \mathrm{Im}\, g) \oplus (Ker\, f \cap Ker\, g).$$

Que peut-on dire alors du produit $f \circ g$?

3.2. – Montrer que $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si il existe une décomposition de E en somme directe de 4 sous-espaces vectoriels A , B , C , D tels que f soit la projection sur $A + B$ parallèlement à $C + D$ et g la projection sur $A + C$ parallèlement à $B + D$.

3.3. – Montrer l'équivalence des trois propositions :

a) $f + g$ est aussi un projecteur de E ;

b) $f \circ g = -\, g \circ f$;

c) $f \circ g = g \circ f = 0$.

Quels sont alors le noyau et l'image de $f + g$?

– QUATRIÈME PARTIE –

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie n.

4.1. – Soit f un endomorphisme de E. Montrer que la trace de la matrice carrée d'ordre n associée à f est indépendante de la base utilisée.

Cette trace dite alors trace de f est notée $t_r(f)$. Quelle relation y a-t-il entre la trace de f et le rang de f si f est un projecteur ?

4.2. – On considère k projecteurs f_1 , f_2 , ... , f_k de E et on note f leur somme : $f = \sum_{i=1}^{k} f_i$.

a) Montrer que si f est aussi un projecteur alors l'image de f est la somme directe des images des f_i pour i allant de *un* à k.

b) Montrer que f est un projecteur si et seulement si on a $f_i \circ f_j = 0$ pour tout couple (i, j)tel que $i \neq j$, $1 \leq i \leq k$et $1 \leq j \leq k$.

4.3. – On suppose que f et g sont deux endomosphismes de E de rang 1.

Montrer que si $f$et $g$sont deux projecteurs tels que $f \circ g = g \circ f$ alors $f = g$ou $f \circ g = g \circ f = 0$.

– CINQUIÈME PARTIE –

On revient au cas général où E n'est pas forcément de dimension finie.

5.1. – Montrer que si f est un endomorphisme de E et g un projecteur de E, on a :

$$Ker\, f \circ g = Ker\, g \oplus (Ker\, f \cap \mathrm{Im}\, g)$$

5.2. – Montrer que si f est un projecteur de E et g un endomorphisme quelconque de E, on a :

$$\mathrm{Im}\, f \circ g = \mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Im}\, g + Ker\, f)$$

5.3. – Etant donné deux projecteurs f et g de E, montrer que $f \circ g$ est aussi un projecteur de E si et seulement si :

$$\mathrm{Im}\, f \cap (\mathrm{Im}\, g + Ker\, f) \subset \mathrm{Im}\, g \oplus (Ker\, f \cap Ker\, g)$$

– SIXIÈME PARTIE –

On suppose dans cette partie que E est de dimension 3.

f et g étant deux projecteurs de rang 1 de E, donner les conditions sur les positions relatives des noyaux et des images de f et g qui sont nécessaires et suffisantes pour que $f \circ g$ soit aussi un projecteur. Déterminer dans ces conditions le noyau et l'image de $f \circ g$ et $g \circ f$.